数理解析研究所講究録
789巻 1992年 8-25

Nonlinear Ergodic Theorems for Non-Lipschitzian Semigroups

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Sをある与えられた集合とし，$m(S)$をS上の有界実数値関数の全体のつくるBanach空間とする．Xをconstant 1を含む$m(S)$の線形部分空間とし，X^*をそのdual空間とする．このとき，$\mu \in X^*$は$\|\mu\| = \mu(1) = 1$を満たすなら，X上のmeanとよばれる．$\mu \in X^*$がmeanである必要十分条件は，任意の$f \in X$に対して

$$\inf_{s \in S} f(s) \leqq \mu(f) \leqq \sup_{s \in S} f(s)$$

が成り立つことである．また，Sがtopological半群であるとき，$a \in S$に対して，$m(S)$上の線形連続写像l_aとr_aは

$$(l_a f)(t) = f(at), \quad (r_a f)(t) = f(ta)$$

で定義される．Xが1を含み，かつ$l_a(X) \subset X$ $(r_a(X) \subset X)$となる線形部分空間とするとき，X上のmean μは，$f \in X$と$a \in S$に対して

$$\mu(l_a f) = \mu(f) \quad (\mu(r_a f) = \mu(f))$$

を満たすなら，X上のleft invariant (right invariant) meanであるといわれる．また，left invariantでかつright invariantであるmeanをinvariant meanとよぶ．

一方，CをHilbert空間の空でない閉凸集合とし，C上のmappingsの族を$\mathfrak{S} = \{T_s : s \in S\}$とする．このとき，$\mathfrak{S}$がつぎの条件(1)，(2)，(3)を満たすなら，$\mathfrak{S}$はnonexpansive半群であるといわれる．

(1) $T_{st}x = T_s T_t x$, $\forall s, t \in S$, $\forall x \in C$;

(2) 任意の$x \in C$に対して，$s \mapsto T_s x$は連続である；

(3) 任意の$s \in S$に対して，T_sはnonexpansive写像である．

また，(3)の条件を

(3)′ 任意の$s \in S$に対して，T_sはリプシッツ係数k_sをもつリプシッツ写像であり，$\limsup_s k_s \leqq 1$である，

という条件でおきかえたとき，$\mathfrak{S}$はuniformly nonexpansive半群であるといわれる．さらに(3)の条件を

(3)″ $$\limsup_t \left\{ \sup_{y \in C} [\|T_t x - T_t y\| - \|x - y\|] \right\} \leqq 0$$

という条件でおきかえたとき，asymptotically nonexpansive半群であるといわれる[6]．

ここでは，まず asymptotically nonexpansive 半群に対する非線形エルゴード定理を invariant mean を用いて Hilbert 空間の場合で証明する．つぎに submean の概念を用いて，同じ半群に対する共通不動点定理を証明する．invariant mean の有効性をみていただければ幸いである．

§2. 非線形エルゴード定理

Hausdorff 位相をもった半群 S がつぎの条件を満たすなら，semitopological 半群であるといわれる．

任意の $a\in S$ に対して，S から S への写像

$$s\longmapsto s\cdot a\ ,\qquad s\longmapsto a\cdot s$$

が連続である．

C を Hilbert 空間 H の空でない集合とし，$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上で定義され，つぎの条件を満たす写像の族とする：

(1) $T_{st}x=T_sT_tx$，$\forall s,t\in S$，$\forall x\in C$；

(2) 任意の $x\in C$ に対して，$s\longmapsto T_sx$ は連続である；

(3) 任意の $x\in C$ に対して

$$\inf_s \sup_t \sup_{y\in C}\left[\|T_{ts}x-T_{ts}y\|-\|x-y\|\right]\leqq 0\ .$$

このとき，$\mathfrak{S}=\{T_s : s\in S\}$ は C 上の asymptotically nonexpansive 半群であるといわれる．$\mathfrak{S}$ に対して，$F(\mathfrak{S})$ を T_s $(s\in S)$ の共通不動点集合を表す．

補助定理1. S を semitopological 半群とし，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし，任意の $s\in S$ に対して，T_s は連続であるとする．このとき，$F(\mathfrak{S})$ は閉凸集合である．

証明 $F(\mathfrak{S})$ が閉集合であることは，T_s $(s\in S)$ の連続性より明らかである．$F(\mathfrak{S})$ が凸集合であることを証明する．そのためには，任意の $x, y\in F(\mathfrak{S})$ に対して，$\frac{x+y}{2}\in F(\mathfrak{S})$ であることを示せば十分である．いま任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\sup_{t}\ \sup_{f\in C}\left[\|T_{ts_0}z-T_{ts_0}f\|-\|z-f\|\right]<\varepsilon_0$$

でかつ $\|x-y\|\varepsilon_0+\varepsilon_0^2<\varepsilon^2$ となるような $s_0\in S$ と $\varepsilon_0>0$ が存在する．よって，任意の $t\in S$ に対して

$$\begin{aligned}\|T_{ts_0}z-z\|^2&=\frac{1}{2}\|T_{ts_0}z-x\|^2+\frac{1}{2}\|T_{ts_0}z-y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2\\&\leqq\frac{1}{2}(\|z-x\|+\varepsilon_0)^2+\frac{1}{2}(\|z-y\|+\varepsilon_0)^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2\\&\leqq\left(\frac{1}{2}\|x-y\|+\varepsilon_0\right)^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2\\&=\|x-y\|\varepsilon_0+\varepsilon_0^2<\varepsilon^2\end{aligned}$$

となる．いま $s\in S$ であり，$\varepsilon>0$ とする．T_s が z で連続であることより

$$\|z-f\|<\delta \Rightarrow \|T_s z - T_s f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような$\delta>0$が存在する．$s_0\in S$として

$$\|T_{ts_0}z - z\| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right), \ {}^{\forall}t\in S$$

となるようなものを選ぶと，任意の$t\in S$に対して

$$\begin{aligned}\|T_s z - z\| &\leqq \|T_s z - T_s T_{ts_0} z\| + \|T_{sts_0} z - z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．よって，任意の$s\in S$に対して，$T_s z = z$となる．これは証明を完了する．

$C(S)$をS上の有界連続関数全体からなるBanach空間とする．そして，$\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$を$C(S)$上のmeansのネットとする．このとき，任意の$f\in C(S)$と$s\in S$に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \to 0, \ \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \to 0$$

をみたすなら，$\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$は漸近的に不変であるといわれる．例えば

$S=\{0,1,2,\cdots\}$とする．いま$f=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in m(S)$に対して，$m(S)=C(S)$上のmeansのネットをつぎのように定義する．

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

実際，μ_nは線形である．また，$f\in m(S)$に対して

$$|\mu_n(f)| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|x_k| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\| = \|f\|$$

であり，かつ $\mu_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$ であるから，

$$\|\mu_n\| = \mu_n(1) = 1 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

つぎに，$f=(x_0, x_1, x_2, \cdots)\in m(S)$ と $m\in S$ に対して

$$|\mu_n(f)-\mu_n(r_m f)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+m}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}\cdot 2m\|f\| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

であるから，$\{\mu_n\}$ は漸近的に不変な means の列である．

もう1つ例を挙げておこう．

$S=\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ とする．$f\in C(\mathbb{R}_+)$と$\lambda>0$に対して，

$$\mu_\lambda(f) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt$$

とする．すると $\{\mu_\lambda : 0<\lambda<\infty\}$ は $C(\mathbb{R}_+)$ 上の漸近的に不変な means のネットになる．まず μ_λ が mean であることを示す．$\mu_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda 1\,dt = 1$ であり，かつ任意の $f\in C(\mathbb{R}_+)$に対して，

$$|\mu_\lambda(f)| = \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt\right| \leqq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \|f\|\,dt = \|f\|$$

であるから，$\|\mu_\lambda\| = \mu_\lambda(1) = 1$ である．よって μ_λ は mean である．つぎに $h \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned}|\mu_\lambda(f) - \mu_\lambda(r_h f)| &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t+h)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_h^{\lambda+h} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^h f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{\lambda+h} f(t)\,dt\right| \\ &\leqq \frac{2\|f\|\cdot h}{\lambda} \to 0 \quad (\lambda \to \infty)\end{aligned}$$

より，$\{\mu_\lambda : 0 < \lambda < \infty\}$ は漸近的に不変な means のネットである．

いまや非線形エルゴード定理を証明しよう．

定理1．C を Hilbert 空間の空でない集合とし，S を $C(S)$ が invariant mean をもつような semitopological 半群とする．$\mathfrak{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし，任意の $s \in S$ に対して，T_s は連続であるとする．このとき，もし $\{T_t x : t \in S\}$ が有界であり，

$$\bigcap_s \overline{\mathrm{co}}\{T_{st}x : t \in S\} \subset C$$

となるような $x \in C$ が存在するなら，$F(\mathfrak{S}) \neq \phi$ である．さらに $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ が $C(S)$ 上の漸近的に不変な means のネットとするなら，x_{μ_α} は $F(\mathfrak{S})$ の元 x_0 に弱収束する．

ただし，x_{μ_α} は

$$(\mu_\alpha)_t (T_t x, y) = (x_{\mu_\alpha}, y), \ \forall y \in H$$

を満たすような唯一の元である．

証明　μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする．このとき，リースの表現定理によって

$$\mu_t (T_t x, y) = (x_\mu, y), \ \forall y \in H$$

となる $x_\mu \in H$ が存在する．μ が invariant なので，分離定理によって

$$x_\mu \in \bigcap_S \overline{co}\{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となる．一方，任意の $y \in H$ に対して，実数値関数

$$t \longmapsto \|T_t x - y\|^2$$

は $C(S)$ の元となるので，この関数に対する μ の値 $\mu_t \|T_t x - y\|^2$ を定義できる．

$$r = \inf_{y \in H} \mu_t \|T_t x - y\|^2$$

とし，

$$M=\{z\in H:\ \mu_t\|T_tx-z\|^2=r\}$$

とする．このとき，任意の $y\in H$ と $s\in S$ に対して

$$\|x_\mu-y\|^2=\|T_tx-y\|^2-\|T_tx-x_\mu\|^2-2(T_tx-x_\mu,\ x_\mu-y)$$

なので，

$$0\leqq\|x_\mu-y\|^2=\mu_t\left(\|T_tx-y\|^2-\|T_tx-x_\mu\|^2-2(T_tx-x_\mu,x_\mu-y)\right)$$

$$=\mu_t\|T_tx-y\|^2-\mu_t\|T_tx-x_\mu\|^2-2(x_\mu-x_\mu,\ x_\mu-y)$$

$$=\mu_t\|T_tx-y\|^2-\mu_t\|T_tx-x_\mu\|^2$$

を得る．これは M が一点 x_μ からなることを示している．

いまや $x_\mu\in F(S)$ であることを示そう．実際，$\varepsilon>0$ とすると，$\{T_tx:\ t\in S\}$ の有界性より，

$$\|T_{su}x_\mu-T_{su}T_tx\|^2\leqq\|x_\mu-T_tx\|^2+\varepsilon,\quad {}^\forall t,s\in S$$

となるような $u\in S$ が存在する．よって

$$-\varepsilon\leqq\|x_\mu-T_tx\|^2-\|T_{su}x_\mu-T_{su}T_tx\|^2$$

$$=\|x_\mu-T_{su}x_\mu\|^2+\|T_{su}x_\mu-T_tx\|^2$$

$$+2(x_\mu-T_{su}x_\mu,\ T_{su}x_\mu-T_tx)-\|T_{su}x_\mu-T_{su}T_tx\|^2$$

である．そこで

$$-\varepsilon \leqq \|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2 + \mu_t\|T_{su}x_\mu - T_t x\|^2$$

$$+2(x_\mu - T_{su}x_\mu, T_{su}x_\mu - x_\mu) - \mu_t\|T_{su}x_\mu - T_t x\|^2$$

$$= -\|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2$$

となり，すべての $s\in S$ に対して $\|x_\mu - T_{su}x_\mu\|^2 < \varepsilon$ を得る．T_t の連続性と補助定理1の方法によって，

$$x_\mu = T_s x_\mu, \quad \forall s\in S$$

を得る．つぎに，この x_μ が invariant mean μ によらないことを証明する．μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする．このとき，すべての $z\in H$ に対して

$$\mu_t\|T_t x - z\|^2 \leqq \inf_s \sup_t \|T_{ts}x - z\|^2$$

を得る．一方，$z\in F(\mathcal{S})$ と $s\in S$ に対して

$$\inf_u \sup_t \left(\|z - T_{tu}T_s x\|^2 - \|z - T_s x\|^2\right) \leqq 0$$

である．よって

$$\inf_u \sup_t \|T_{tu}x - z\|^2 \leqq \inf_u \sup_t \|T_{tus}x - z\|^2$$

$$= \inf_u \sup_t \|T_{tu}T_s x - z\|^2 \leqq \|T_s x - z\|^2$$

である．そこで，$z \in F(\mathcal{S})$ に対して

$$\mu_t \|T_t x - z\|^2 = \inf_s \sup_t \|T_{ts} x - z\|^2$$

を得る．これは x_μ が μ によらないことを意味している．いま $x_0 = x_\mu$ とおくと，x_{μ_α} が x_0 に弱収束することを示そう．μ をネット $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ の cluster point（弱*位相の意味での）とする．このとき，[15] によって，μ は invariant mean である．$\{x_{\mu_{\alpha_\beta}}\}$ を $x_{\mu_{\alpha_\beta}}$ が H の元 z に弱収束するような $\{x_{\mu_\alpha}\}$ の部分ネットとすると，ネット $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ の cluster point λ はネット $\{\mu_\alpha\}$ の cluster point でもあるので，λ は invariant mean である．そこで，$z = x_\lambda = x_0$ を得る．これは，x_{μ_α} が $F(\mathcal{S})$ の元 x_0 に弱収束することを意味する．

§3. 不動点定理

X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とする．このとき，X 上の実数値関数 μ はつぎの条件を満たすなら，X 上の submean であるといわれる [9]．

(1) $\mu(f+g) \leqq \mu(f) + \mu(g)$, $\forall f, g \in X$;

(2) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$, $\forall f \in X$, $\alpha \geqq 0$;

(3) $f \leqq g \Rightarrow \mu(f) \leqq \mu(g)$;

(4) constant c に対して, $\mu(c)=c$.

つぎの補助定理は溝口－高橋[9]によって得られた.

補助定理2. S を semitopological 半群とし, X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とする. μ を X 上の submean とする. $\{x_t : t\in S\}$ を Hilbert 空間 H の有界部分集合とし, D を H の閉凸集合とする. 任意の $x\in D$ に対して,

$$f(t)=\|x_t-x\|^2,\ {}^\forall t\in S$$

で定義される S 上の実数値関数 f は X に属するとする. このとき,

$$g(x)=\mu_t\|x_t-x\|^2,\ {}^\forall x\in D,$$

$$r=\inf_{x\in D} g(x)$$

とおくならば,

$$g(z)=r,\quad r+\|z-x\|^2\leqq g(x),\ {}^\forall x\in D$$

となるような $z\in D$ が一意に存在する.

X を constant 1 を含み, l_s, $s\in S$ のもとで不変となるような $m(S)$ の線形部分空間とする. このとき, X 上の submean μ は

$$\mu(f)=\mu(l_s f),\ {}^\forall s\in S,\ {}^\forall f\in X$$

を満たすなら left invariant であるといわれる．

定理2．C を Hilbert 空間 H の空でない集合とし，S を semitopological 半群とする．X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とし，$l_s, s\in S$ のもとで不変のものとする．μ を X 上の left invariant な submean とし，$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ をすべての T_t が連続となるような C 上の asymptotically nonexpansive 半群とする．もし，$\{T_t x : t\in S\}$ が有界となり，かつ

$$\bigcap_s \overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}\subset C$$

となるような $x\in C$ が存在し，任意の $v\in H$ に対して

$$f(t)=\|T_t x - v\|^2,\ \forall t\in S$$

で定義される実数値関数 f が X に属するならば，$T_s z = z$ となるような T_s の共通な不動点 z が存在する．

証明　まず，H 上の実数値関数 g を

$$g(y)=\mu_t\|T_t x - y\|^2,\ \forall y\in H$$

で定義しよう．$r=\inf_{y\in H} g(y)$ とおくと，補助定理2によって，

$$g(z)=r,\quad r+\|z-y\|^2\leqq g(y),\ \forall y\in H$$

となるような $z\in H$ が一意に存在する．任意の $s\in S$ に対して，Q_s を H から $\overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}$ の上への metric projection としよう．このとき，[10] によって，Q_s は nonexpansive であり，任意の $t\in S$ に対して

$$\|T_{st}x-Q_s z\|^2=\|Q_sT_{st}x-Q_s z\|^2\leqq\|T_{st}x-z\|^2$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned}\mu_t\|T_tx-Q_sz\|^2&=\mu_t\|T_{st}x-Q_sz\|^2\\&\leqq\mu_t\|T_{st}x-z\|^2=\mu_t\|T_tx-z\|^2\end{aligned}$$

となり，$Q_sz=z$ を得る．これは $z\in\overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}$ であることを意味する．これはすべての $s\in S$ についていえるので

$$z\in\bigcap_s\overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}\subset C$$

となる．この z について，$T_sz=z$, $\forall s\in S$ となることを示そう．実際，$\{T_tx : t\in S\}$ は有界なので，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\|T_{ss_0}z-T_{ss_0}T_tx\|^2<\|z-T_tx\|^2+\varepsilon,\quad\forall s,t\in S$$

となるような $s_0\in S$ を選ぶことができる．このとき，

$$\mu_t \| T_{ss_0} z - T_t x \|^2 = \mu_t \| T_{ss_0} z - T_{ss_0 t} x \|^2$$
$$= \mu_t \| T_{ss_0} z - T_{ss_0} T_t x \|^2$$
$$\leqq \mu_t \| z - T_t x \|^2 + \varepsilon$$

となる．一方，

$$\| z - y \|^2 \leqq \mu_t \| T_t x - y \|^2 - \mu_t \| T_t x - z \|^2, \quad {}^\forall y \in H$$

なので，すべての $s \in S$ に対して，

$$\| z - T_{ss_0} z \|^2 \leqq \mu_t \| T_t x - T_{ss_0} z \|^2 - \mu_t \| T_t x - z \|^2$$
$$\leqq \mu_t \| z - T_t x \|^2 + \varepsilon - \mu_t \| T_t x - z \|^2$$
$$= \varepsilon$$

を得る．このあとは，補助定理1と同様な手法によって，z が $T_s, s \in S$ の共通の不動点であることが証明できる．

定理2の直接的な結果として，定理1の中の $F(\mathcal{S})$ が空でないことが証明できる．さらにつぎの不動点定理を証明するのにも直接使用できる．semitopological 半群 S が left reversible であるとは，S の任意の2つの閉右イデアルが空でない共通部分をもつときをいう．このケースでは，$(S, \leqq)$

が

$$a \leqq b \iff \{a\} \cup \overline{aS} \supset \{b\} \cup \overline{bS}$$

によって directed system になる．

系．C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合とし，S を left reversible な半群とする．$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ をすべての T_t が連続であるような C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし，ある $x \in C$ が存在して，$\{T_t x : t \in S\}$ が有界であり，

$$\bigcap_s \overline{co}\{T_{st}x : t \in S\} \subset C$$

となるものとする．このとき，すべての T_s に対して，$T_s z = z$ となるような $z \in C$ が存在する．

証明　$m(S)$ 上の実数値関数 μ を

$$\mu(f) = \limsup_s f(s), \ \forall f \in m(S)$$

で定義する．すると，μ は $m(S)$ 上の left invariant な submean である．そこで，定理2を使えばその証明は完了する．

以上，抽象的な非線形エルゴード定理と不動点定理を証明したが，これらはすべて，$S = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ の場合や，

$$S = [0, \infty), \ S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ \cdots\cdots$$

の場合に利用できる．

References

[1] Baillon, J. B., Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 283 (1976), 75-78.

[2] Brézis, H. and F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Adv. in Math., 25 (1977), 165-177.

[3] Hirano, N. and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.

[4] Ishihara, H., Fixed point theorems for lipschitzian semigroups, Canad. Math. Bull., 32 (1989), 90-97.

[5] Ishihara, H. and W. Takahashi, Fixed point theorems for uniformly lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 127 (1987), 206-210.

[6] Kirk, W. A. and R. Torrejón, Asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis 3 (1979), 111-121.

[7] Kiuchi, H. and W. Takahashi, Asymptotic behavior of almost-orbits of non-Lipschitzian semigroups in Hilber space, to appear.

[8] Lau, A.T., Semigroup of nonexpansive mappings on a

Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 105 (1985), 514–522.

[9] Mizoguchi, N. and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69–80.

[10] Phelps, R.P., Convex sets and nearest points, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 790–797.

[11] Rodé, G., An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172–178.

[12] Takahashi, W., A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253–256.

[13] ——, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543–553

[14] ——, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55–58.

[15] ——, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, Canad. J. Math., 35 (1992), 1–8.